Adı Soyadı :
Numara :

07.07.2022

MAT 302 DİFERENSİYEL GEOMETRİ II DERSİ BÜTÜNLEME SINAVI SORULARI

SORU 1: $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (3t,\ 4\sin t,\ 4\cos t)$ eğrisinin

a) T, N, B Frenet 3-ayaklısını bulunuz, (10 Puan)

b) κ eğriliğini ve τ burulmasını bulunuz. (10 Puan)

SORU 2: $\alpha: I \to E^3$, $\alpha(t) = (1+\sin^2 t,\ 2+\sin t\cos t,\ 3+\cos t)$ eğrisinin

a) $t \in I$ parametresinin yay-parametresi olup olmadığını inceleyiniz, (10 Puan)

b) $\alpha(0)$ noktasındaki normal düzleminin denklemini bulunuz. (10 Puan)

SORU 3: E^3 de $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ denklemiyle verilen yüzeyin $P = (-3, 4, 5)$ noktasındaki teğet düzleminin denklemini bulunuz.

SORU 4: $M, N \in E^n$ eğrileri sırasıyla $(I, \alpha), (I, \beta)$ koordinat komşulukları ile verilsin. Eğer N, M nin involütü ise $\forall s \in I$ için $d(\alpha(s), \beta(s)) = |c-s|$, $c = sbt$ dir, ispatlayınız.

SORU 5: Geodezik eğriyi tanımlayınız, geodezik eğrilerin her noktada hız vektörlerinin uzunlukları sabittir, ispatlayınız.

Not: Her soru eşit puanlı ve süre 90 dakikadır.

Başarılar
Prof.Dr. İsmail AYDEMİR

CEVAP ANAHTARI

1) α yay-parametreli midir?

$$\alpha'(t) = (3,\ 4\cos t,\ -4\sin t) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{9+16\cos^2 t+16\sin^2 t}$$

$$= \sqrt{9+16} = 5 \neq 1$$

olduğundan α birim hızlı değildir.

a) $T = \dfrac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} = \dfrac{1}{5}(3,\ 4\cos t,\ -4\sin t)$ olur.

$\alpha''(t) = (0,\ -4\sin t,\ -4\cos t)$ olup

$$\alpha'(t) \times \alpha''(t) = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 3 & 4\cos t & -4\sin t \\ 0 & -4\sin t & -4\cos t \end{vmatrix}$$

$$= e_1[-16\cos^2 t - 16\sin^2 t] - e_2[-12\cos t] + e_3[-12\sin t]$$

$$= (-16,\ 12\cos t,\ -12\sin t)$$

olur.

$\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\| = \sqrt{16^2 + 12^2(\cos^2 t + \sin^2 t)} = 20$ olup

$$B = \frac{\alpha'(t) \times \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|} = \frac{1}{5}(-4,\ 3\cos t,\ -3\sin t)$$

bulunur.

$$N = B \times T = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -4 & 3\cos t & -3\sin t \\ 3 & 4\cos t & -4\sin t \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{25}\Big[e_1(-12\cos t\sin t + 12\sin t\cos t) - e_2(16\sin t + 9\sin t)$$

$$+ e_3(-16\cos t - 9\cos t)\Big]$$

$$= \frac{1}{25}(0,\ -25\sin t,\ -25\cos t)$$

$$= (0,\ -\sin t,\ -\cos t)$$

bulunur.

b) $$\kappa(t)=\frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}=\frac{20}{125}=\frac{4}{25}$$

olur.

$$\tau(t)=\frac{\det(\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t))}{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|^2}$$ dir.

$\alpha'''(t)=(0,-4\cos t,\ 4\sin t)$ olup

$$\det(\alpha'(t),\alpha''(t),\alpha'''(t))=\begin{vmatrix}3 & 4\cos t & -4\sin t\\ 0 & -4\sin t & -4\cos t\\ 0 & -4\cos t & 4\sin t\end{vmatrix}$$

$$=3(-16\sin^2 t-16\cos^2 t)-4\cos t.0-4\sin t.0$$

$$=-48$$

olup $$\tau(t)=\frac{-48}{400}=-\frac{3}{25}$$

bulunur.

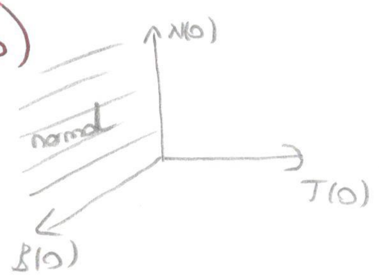
2) a) $\alpha'(t)=(2\sin t\cos t,\ \cos^2 t-\sin^2 t,\ -\sin t)$

$=(\sin 2t,\ \cos 2t,\ -\sin t)$

$\Rightarrow \|\alpha'(t)\|=\sqrt{\sin^2 2t+\cos^2 2t+\sin^2 t}=\sqrt{1+\sin^2 t}\neq 1$

olduğundan t yay-parametresi değildir.

b)



Normal düzlemin normali $T(0)$ doğrultusundadır.

$$T(0)=\frac{\alpha'(0)}{\|\alpha'(0)\|}=(0,1,0)$$

olup $(0,1,0)$ normal düzlemin normal vektörüdür.

Düzlemin denklemi $ax+by+cz+d=0$ ise

$a=0,\ b=1,\ c=0$ olup

$y+d=0$ olur. $\alpha(0)=(1,2,4)$ düzlem denklemini sağlar. Böylece

$2+d=0 \Rightarrow d=-2$ olup $\alpha(0)$ noktasındaki normal düzlemin denklemi

$y-2=0$

bulunur.

3) $F(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$ olur. Burada

$$F_x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad F_y=\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

ve $F_z=-1$ olur. Böylece

$$\vec{\nabla}F=(F_x,F_y,F_z)$$
$$=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$$

olup $P=(-3,4,5)$ olmak üzere

$$\vec{\nabla}F\Big|_P=\left(\frac{-3}{\sqrt{3^2+4^2}},\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}},-1\right)$$
$$=\left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5},-1\right)$$

bulunur. $\vec{\nabla}F|_P$ teğet düzlemin normali olup $5.\vec{\nabla}F|_P$ de normal vektör olarak alınabilir. $\vec{n}=5.\vec{\nabla}F|_P=(-3,4,-5)$ olur.

Teğet düzlemin denklemi $ax+by+cz+d=0$ alınırsa

$a=-3,\ b=4,\ c=-5$ olup

$-3x+4y-5z+d=0$ olur. $P=(-3,4,5)$ düzlem denklemini sağlar. Yani

$+9+16-25+d=0 \Rightarrow d=0$ olup P noktasındaki teğet düzlemin denklemi

$$3x-4y+5z=0$$

bulunur.

4. ve 5. soruların cevabı ders notunda mevcuttur.